Des Graphes et des Matrices(ébauche)

PAR PATRICK TELLER

Dans ce qui suit on considérera un graphe simple et sa matrice d'incidence « sommets-arêtes », dans laquelle les colonnes représentent les arêtes.

Ceci est un essai d'étude d'un graphe « sans méthodes de la théorie des graphes », avec des techniques d'Algèbre linéaire élémentaire.

Les propriétés que nous allons étudier concernent la recherche des cycles et la détermination des composantes connexes.

1 Définitions

Soit un graphe non orienté G=(V,E), où V=$\{v_1,...,v_n\}$ et E=$\{e_1,..,e_m\}$; nous supposerons que les sommets forment un ensemble ordonné et nous orienterons les arêtes de manière arbitraire, de telle sorte que pour tout k l'origine de l'arête e_k, notée $\alpha(e_k)$, soit inférieure à l'extrémité, notée $\beta(e_k)$.

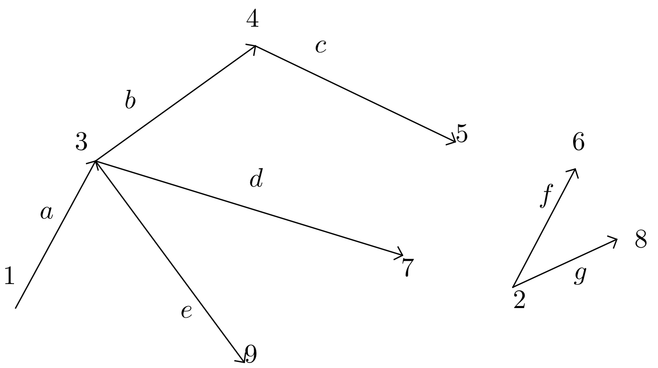
On notera M la matrice d'incidence du graphe, les colonnes représentent les arêtes et les lignes correspondent aux sommets; nous désignerons les colonnes de M par M_1,...,M_m et pour tout k M_k s'écrit $\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ .... \\ -1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ avec un 1 à la ligne $\alpha(M_k)$ et un -1 à la ligne $\beta(M_k)$; un tel vecteur sera dit élémentaire.

Définition 1. *L'ordre lexicographique pour les arêtes*

Soient les arêtes e et f

On dira que $e \preccurlyeq f$ *lorsque* $\begin{cases} \alpha(e) < \alpha(f) \\ \text{ou} \\ \alpha(e) = \alpha(f) \text{et } \beta(e) \leqslant \beta(f) \end{cases}.$

Exemple 2. Le graphe suivant est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Pour ce qui nous concerne (composantes connexes et cycles) nous confondrons graphe et matrice d'incidence.

Définition 3. *Arêtes, Chaines et Cycles*

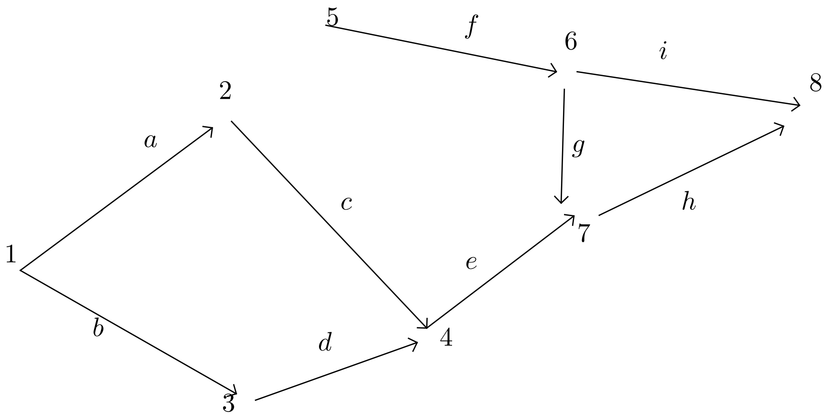
On appellera chaine toute suite de sommets C=$(v_{i_1}, ..., v_{i_q})$ telle que pour chaque $k \in \{1, ..., q-1\}$ $(v_{k_i}, v_{k_{i+1}})$ ou (v_{k_i+1}, v_{k_i}) appartient à E; v_{i_1} sera appelé l'origine de la chaine et v_{i_q} sera appelé son extrémité (notés respectivement $\alpha(C)$ et $\beta(C)$).

Soient deux chaines C et D telles que l'origine de D est l'extrémité de C, la concaténation C@D est une chaine; de même dans le cas de l'arête $e = (v, w)$, où $v < w$, nous noterons -e la chaine (w, v).

On notera la chaine $(v_{i_1}, ..., v_{i_q})$ $\sum_{k=1}^{q-1} \varepsilon_k e_{i_k}$ où $e_{i_k} = (\min(\{v_{\mathrm{ik}}, v_{i_{k+1}}\}), \max(\{v_{\mathrm{ik}}, v_{i_{k+1}}\}))$ et suivant les cas $\varepsilon_k = 1$ ou -1.

On appellera cycle toute chaine $(v_{i_1}, ..., v_{i_q})$ où $v_{i_1} = v_{i_q}$.

Exemple 4.



(1,2,4,1) est un cycle; (1,2,4,3) est une chaine.

On appellera vecteur élémentaire tout vecteur (numérique) de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ -1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ que l'on désignera par v_i-v_j (lorsque la i-ème coordonnée vaut 1 et la j-ème vaut -1) ou $\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ .... \\ \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix}$, noté 0.

Définition 5. *L'ordre lexicographique pour les vecteurs élémentaires*

On dira que v_a-$\mathrm{v}_b \preccurlyeq v_i - v_j$ *lorsque* $\begin{cases} a < i \\ \text{ou} \\ a = i \text{ et } b \leqslant j \end{cases}$ *et* $\forall v \neq 0, v < 0$

on supposera que les colonnes de la matrice d'incidence sont rangées dans cet ordre ??

Définition 6. *Matrice de Type Incidence*

On appellera Matrice de Type Incidence (MTI) toute matrice rectangulaire à valeurs dans {0,-1,1} dont les colonnes non nulles sont des vecteurs élémentaires.

Une MTI sera dite réduite lorsque les origines de ses colonnes non nulles sont distinctes deux à deux (les colonnes non nulles sont alors linéairement indépendantes).

A une MTI on associera « le graphe » dont l'ensemble des colonnes non nulles est la matrice d'incidence.

Définition 7.

Soit deux vecteurs élémentaires de même origine X et Y on notera S(X,Y)=X-Y si ($\beta(X)$-$\beta(Y)$)>0, sinon Y-X, c'est à dire celui parmi X-Y et Y-X qui est un vecteur élémentaire.

On remarquera que S(X,X)=0.

Exemple 8. $\mathrm{S}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ mais $\mathrm{S}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Remarque 9. Si X et Y sont deux vecteurs élémentaires de même origine ou de même extrémité la réunion des sommets de X et Y est égale à la réunion de X et de S(X,Y); par suite remplacer Y par S(X,Y) ne modifie pas V.

Définition 10. *Incidence d'une chaine*

Soit la chaine $C=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i e_i$ où les $\varepsilon_i\in\mathbb{Z}\{-1,1,0\}$ on appelle incidence de C le vecteur $\mathrm{M}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \cdots\\ \cdots\\ \varepsilon_m\end{pmatrix}$

Proposition 11.

Avec les notations ci-dessus les cycles de G sont les chaines d'incidence nulle.

Définition 12. *L'ensemble des cycles du graphe*

On appellera socle du cycle (v_{i_1}, ..., $v_{i_{q-1}}$, v_{i_1}) la liste [v_{i_1}, ..., $v_{i_{q-1}}$] (définie à une translation modulo q-1 près).e

Lorsque le socle est injectif le cycle sera dit élémentaire.

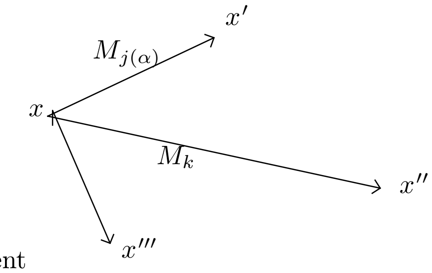
Soient deux cycles ($v_{i_1},....,v_{i_{q-1}},v_{i_1}$) et ($v_{j_1}=v_{i_1},....,v_{j_{r-1}},v_{j_1}$) on appellera somme de ces deux cycles le cycle ($v_{i_1},....,v_{i_{q-1}},v_{j_2},....,v_{j_{r-1}},v_{i_1}$).

De même on appellera symétrique du cycle ($v_{i_1},....,v_{i_{q-1}},v_{i_1}$) le cycle ($v_{i_1},v_{i_{q-1}},...,v_{i_2},v_{i_1}$)

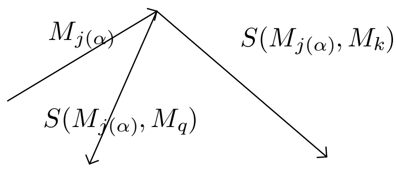
2 La réduction de la matrice d'incidence

Définition 13. *Redéploiement élémentaire d'un graphe*

Soit α un sommet et M$_{j(\alpha)}$ la colonne de M la plus petite au sens de $\preccurlyeq$ parmi les colonnes d'origine α, on appellera redéployement élémentaire du graphe M le remplacement de toutes les autres colonnes M$_k$ de même origine que M$_{j(\alpha)}$ par les colonnes S(M$_{j(\alpha)}$,M$_k$).



devient



$x < x' < x''$
$x < x' < x'''$

Proposition 14. *Algorithme 1: séparer les origines*

Soit la matrice d'incidence M et (e$_1$,...,e$_m$) la liste des arêtes, dans l'ordre des colonnes de M; on pose M'=M et P=I.

Soit i:1

tant que i$\leqslant n$

A:$\{M_k, \alpha(M_k) = i\}$, si $A \neq \varnothing$, soit M$_{j_0}$=min(A), pour tout N de A-M$_{j_0}$, N:N-M$_{j_0}$ (=S(N,M$_{j_0}$)),P:P-P$_{j_0}$

i:i+1.

Il est immédiat qu'à chaque itération on obtient une MTI, et après un nombre fini d'itérations on aboutit à une MTI réduite M'; à chaque itération s'effectue un redéployement élémentaire de telle sorte que l'ensemble des sommets de M' est celui de M, mais les arêtes de M' ont des origines distinctes deux à deux, donnant à l'ensemble des sommets une structure d'ensemble partiellement ordonné, filtrant à droite.

De l'égalité M'=MP on déduit pour chaque colonne M'$_j$ de M' que $\sum_{i=1}^m P_{\text{ij}} M_i$ =M'$_j$, qui est un vecteur élémentaire (nul ou pas).

Si on définit pour chaque colonne M'$_j$ un indicateur S(j)={k,M'$_k$<M'$_j$} et E(j)=$\left\{\sum_{k \in S(j)} \eta_k M_k\right.$, $\left.\forall k \in \{0,1\}\right\}$ alors à l'issue de l'exécution chaque colonne de M'$_j$=max{M$_j$-Q, $Q \in E(j)$}. *

Cette remarque va nous permettre d'étudier les coefficients apparaissant dans la matrice P.

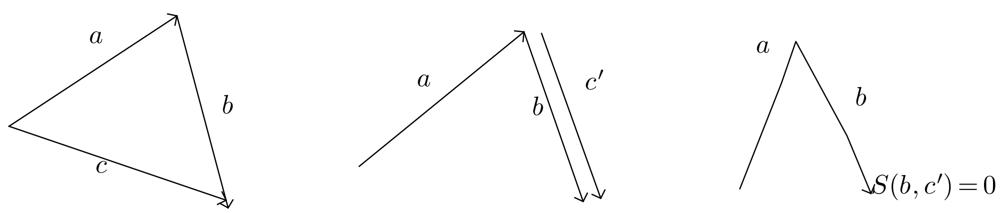
Soit un cycle élémentaire de M: $\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{j_k} e_{j_k}$=0, donc la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{j_k} M_{j_k}$ est nulle; si on suppose que $M'_{j_1} \lessdot \ldots < M'_{j_r}$, on déduit de (*) que M'$_{j_r}$=0 (**) et par suite P$_{j_r}$=$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}$, où on retrouve donc les coefficients ε_{j_k} et des 0 ailleurs; en particulier la colonne P$_j$ est à coefficients dans {-1,1,0}.

Considérons une arête M$_j$ n'appartenant pas à un cycle: algébriquement la colonne P$_j$ telle que M'$_j$=MP$_j$ est définie « à un cycle près », cependant comme S(j)={k,M'$_k$<M'$_j$} et comme dans chaque cycle il y a une arête M$_k$ telle que M'$_k$=0 et donc ne peut appartenir à S(j), il découle de (*) qu'il ne peut y avoir d'arête comptée 2 fois dans l'expression de M'$_j$ et donc P$_j$ ne contient que des coefficients appartenant à $\{-1, 1, 0\}$.

M' étant réduite et engendrée par opérations élémentaires sur les colonnes à partir de M, ses colonnes non nulles sont linéairement indépendantes et engendrent Im(M), donc le nombre de ses colonnes nulles est la dimension du noyau Ker(M); les colonnes correspondant dans P appartiennent à Ker(M) et, comme P est le produit de matrices représentant des opérations élémentaires, elle est inversible d'où finalement ces colonnes, indépendantes, constituent une base de Ker(M).

Plus haut nous avions vu que les cycles sont les chaines d'incidence nulle; la discussion ci-dessus montre que les colonnes P$_j$ telles que MP$_j$=0 décrivent les cycles élémentaires.

Exemple 15.

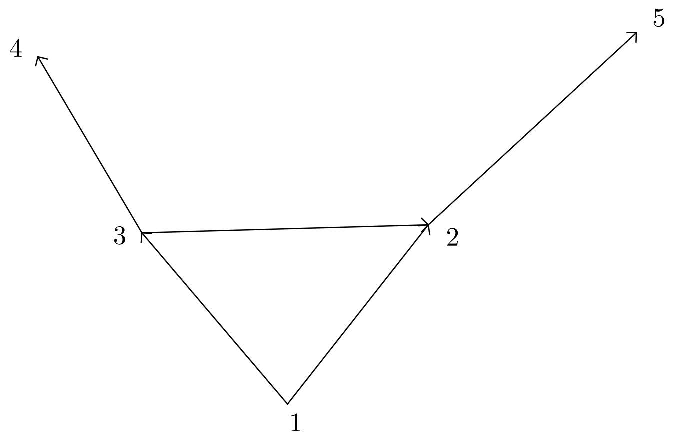


$a + b - c = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Exemple 16.



$M'_k = (1,2) + (2,3) + (3,4)$

$M'_j = (1,3) - (2,3) + (2,5)$

Comme le redéploiement a résolu le cycle (1,2,3,1) avant les arêtes relatives aux sommets 4 et 5, au moment du redéployment qui les concerne M'$_k$=(1,3)+(3,4) et M'$j = (1,2) + (2,5)$ et M'$_j$-M'$_k$=(1,2)+(2,5)-(1,3)-(3,4); les coefficients de la colonne concernée dans P sont dans {-1,1,0}.

La remarque 9 assure que les composantes connexes de M' sont les mêmes que celles de M.

Exemple 17.

```
Maxima 5.41.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

```
(%i1) m:transpose(matrix([1,-1,0,0,0,0],[1,0,0,-1,0,0],[1,0,-1,0,0,0],[0,
      0,1,-1,0,0],[0,0,1,0,0,-1],[0,1,0,0,0,-1],[0,1,-1,0,0,0],[0,0,0,0,1,-
      1]));p:ident(8);
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(\%o2)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i3) `for k:1 thru 6 do (m[k,2]:m[k,2]-m[k,1],m[k,3]:m[k,3]-m[k,1],p[k,3]:p[k,3]-p[k,1],p[k,2]:p[k,2]-p[k,1]);m;p;`

(%o3) **done**

$$\text{(\%o4)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(\%o5)}\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i6) `for k:1 thru 6 do (m[k,2]:m[k,2]-m[k,3],m[k,6]:m[k,6]-m[k,3],m[k,7]:m[k,7]-m[k,3],p[k,2]:p[k,2]-p[k,3],p[k,6]:p[k,6]-p[k,3],p[k,7]:p[k,7]-p[k,3]);m;p;`

(%o6) **done**

$$\text{(\%o7)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(\%o8)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i73) `for k:1 thru 6 do (m[k,4]:m[k,4]-m[k,2],p[k,4]:p[k,4]-p[k,2],m[k,5]:m[k,5]-m[k,2],p[k,5]:p[k,5]-p[k,2],m[k,6]:m[k,6]-m[k,2],p[k,6]:p[k,6]-p[k,2]);m;p;`

(%o73) **done**

$$\text{(\%o74)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(%o75) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i76) for k:1 thru 6 do (m[k,6]:m[k,6]-m[k,5],p[k,6]:p[k,6]-p[k,5]);m;p;
```

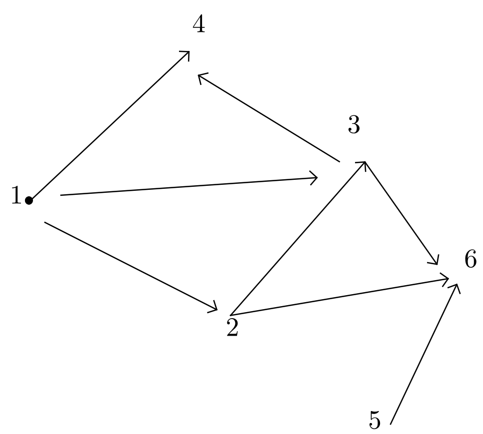
(%o76) **done**

(%o77) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

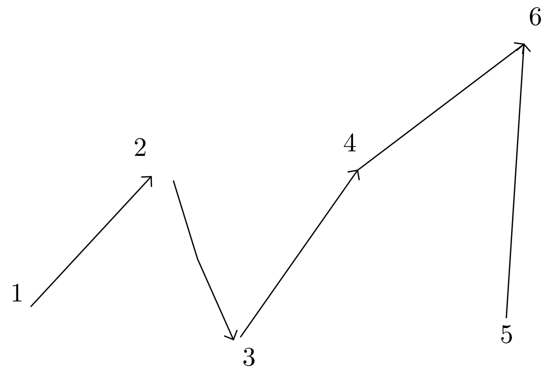
(%o78) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i79)

Le graphe G était



La matrice M’, privée de sa colonne nulle, représente le graphe



Le « nouveau » graphe possède les mêmes sommets mais l'ensemble de ses arêtes a changé.

Remarque 18.

Si on associe à un graphe acyclique une relation d'ordre sur l'ensemble des sommets V qui consiste à écrire que v<w lorsque v-w est une somme d'arêtes, M' représente un ordre filtrant à droite sur chaque composante connexe [1].

Théorème 19. *Sur les composantes connexes*

Interprétons la remarque 18:

dans chaque composante connexe de M' (c'est à dire de M) il y a un sommet et un seul qui est extrémité d'une arête de M' et pas origine; donc il suffit de rechercher les lignes de M' qui contiennent un -1 et pas de 1.

3 Complexité

Soit pour chaque sommet x de M d(x)=$|\{k, \alpha(M_k) = x\}|$.

Lors du redéployment des arcs de sommet x il y aura d(x)-1 soustractions de la forme N:N-M$_{j_0}$ et P:P-P$_{j_0}$; ces soustractions créent des colonnes dans M' dont l'origine est égale à l'extrémité y de M$_{j_0}$, qui s'ajoutent aux d(y) colonnes qui avaient pour origine y.

D'où au total il y aura (au plus) $d(1) - 1 + (d(1) + d(2) - 1)$+....+(d(1)+d(2)+....+d(p)-1) « étapes », chaque étape comprenant une soustraction de la forme N:N-M$_{j_0}$ et une soustraction P:P-P$_{j_0}$.

Lxes suites (d(1)+d(2)+...+d(k)) forment une suite strictement croissante à valeurs dans {1,...,n} on pourra donc dire que la somme $d(1) - 1 + (d(1) + d(2) - 1)$+....+(d(1)+d(2)+....+d(p)-1) est O(n^2).

La matrice M et ses transformations M' sont (très) creuses et la soustraction se résume à changer un 1 en 0 et un 0 en 1; la représentation des matrices creuses doit permettre un coût très faible.

Quant à P, comme elle ne comporte que des-1,+1,0 et est creuse elle aussi, le côut de P:P-P$_{j_0}$ doit ussi être assez bas; les d(1)-1 premières consistent à changer un 0 en un -1 chaque fois, le d(1)+d(2)-1 (au pire) changent deux 0, etc...

d'où, au pire, 1 $\{d(1)-1\}+2\{(d(1)+d(2)-1)\}$+....+p$\{(d(1)+d(2)+....+d(p)-1)\}$ réécritures de 0 en +/-1; c'est à dire O(n^3) opérations « très élémentaires ».

Le stockage étant très économe: deux matrices creuses.

On comparera avec [1] et [2]

Paris, janvier 2019

Bibliographie :

[1] perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2009/nicolas-brunie.pdf

[2] K.Paton, An Algorithm for Finding a Fundamental Set of Cycles of a Graph, Communications of the ACL, volume 12, Number9, September 1969.