Des Graphes et des Matrices

PAR PATRICK TELLER

Dans ce qui suit on considérera un graphe simple et sa matrice d'incidence « sommets-arêtes », dans laquelle les colonnes représentent les arêtes.

Ceci est un essai d'étude d'un graphe « sans méthodes de la théorie des graphes », avec des techniques d'Algèbre linéaire élémentaire.

Les propriétés que nous allons étudier concernent la recherche des cycles et la détermination des composantes connexes.

1 Définitions

Soit le graphe non orienté G=(V,E), où V=$\{v_1,...,v_n\}$ et E=$\{e_1,..,e_m\}$; nous supposerons que les sommets forment un ensemble ordonné et nous orienterons les arêtes de manière arbitraire, de telle sorte que pour tout k l'origine de l'arête e_k, notée $\alpha(e_k)$, soit inférieure à l'extrémité, notée $\beta(e_k)$.

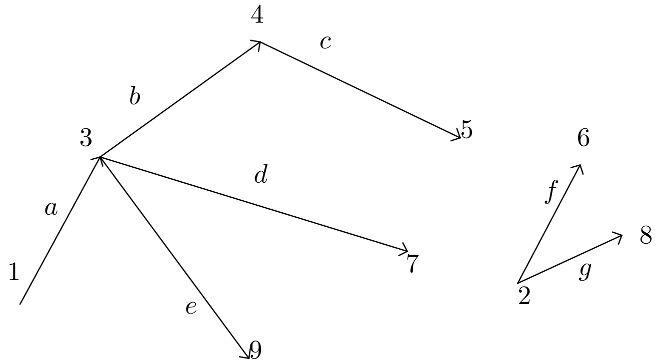
On notera M la matrice d'incidence du graphe, les colonnes représentent les arêtes et les lignes correspondent aux sommets; nous désignerons les colonnes de M par $M_1,...,M_m$ et pour tout k M_k s'écrit $\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ .... \\ -1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ avec un 1 à la ligne $\alpha(M_k)$ et un -1 à la ligne $\beta(M_k)$; un tel vecteur sera dit élémentaire.

Définition 1. *L'ordre lexicographique pour les arêtes*

Soient les arêtes e et f

On dira que $f \preccurlyeq e$ *lorsque* $\begin{cases} \alpha(e) < \alpha(f) \\ \text{ou} \\ \alpha(e) = \alpha(f) \text{et } \beta(e) \leqslant \beta(f) \end{cases}$.

Exemple 2. Le graphe suivant est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Pour ce qui nous concerne (composantes connexes et cycles) nous confondrons graphe et matrice d'incidence.

Définition 3. *Arêtes, Chaines et Cycles*

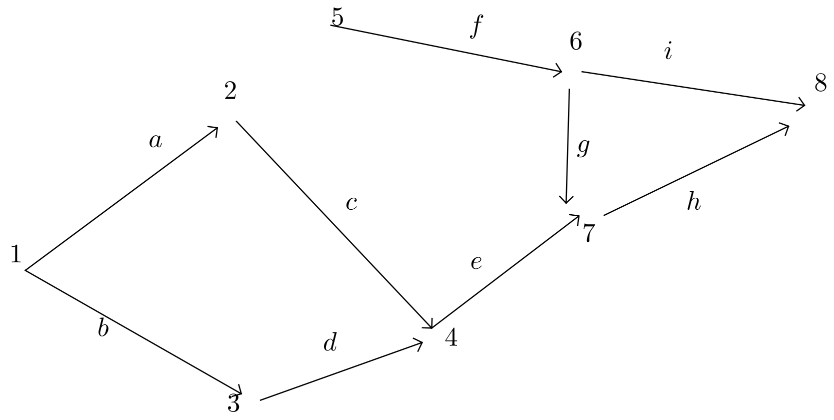
On appellera chaine toute suite de sommets C=$(v_{i_1},\ldots.,v_{i_q})$ telle que pour chaque $k\in\{1,\ldots,q-1\}$ $(v_{k_i}{,}v_{k_{i+1}})$ ou $(v_{k_i+1}{,}v_{k_i})$ appartient à E; v_{i_1} sera appelé l'origine de la chaine et v$_{i_q}$ sera appelé son extrémité (notés respectivement $\alpha(C)$ et $\beta(C)$).

Soient deux chaines C et D telles que l'origine de D est l'extrémité de C, la concaténation C@D est une chaine; de même dans le cas de l'arête $e=(v{,}w)$, où $v<w$, nous noterons -e la chaine (w,v).

On notera la chaine $(v_{i_1},\ldots.,v_{i_q})$ $\sum_{k=1}^{q-1}\varepsilon_k e_{i_k}$ où $e_{i_k}=(\min(\{v_{\mathrm{ik}},v_{i_{k+1}}\}),\max(\{v_{\mathrm{ik}},v_{i_{k+1}}\}))$ et suivant les cas $\varepsilon_k=1$ ou -1.

On appellera cycle toute chaine $(v_{i_1},\ldots.,v_{i_q})$ où $v_{i_1}=v_{i_q}$.

Exemple 4.



(1,2,4,3,1) est un cycle; (1,2,4,3) est une chaine.

On appellera vecteur élémentaire tout vecteur (numérique) de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ -1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{Z})$, que l'on désignera par v_i-v_j (lorsque la i-ème coordonnée vaut 1 et la j-ème vaut -1), ou $\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ \ldots. \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix}$, noté 0.

Définition 5. *L'ordre lexicographique pour les vecteurs élémentaires*

On dira que v_i-$\mathrm{v}_j \preccurlyeq v_a - v_b$ *lorsque* $\begin{cases} a < i \\ \text{ou} \\ a = i \,\text{et}\, b \leqslant j \end{cases}$ *et* $\forall v \neq 0, v > 0$

Remarque 6.

A toute arête correspond un vecteur élémentaire mais la réciproque est fausse: dans le cas de l'exemple 4 v_2-v_6 est un vecteur élémentaire mais il ne représente pas une arête.

Définition 7. *Matrice de Type Incidence*

On appellera Matrice de Type Incidence (MTI) toute matrice rectangulaire à valeurs dans {0,-1,1} dont les colonnes non nulles sont des vecteurs élémentaires.

Une MTI sera dite réduite lorsque les origines de ses colonnes non nulles sont distinctes deux à deux (les colonnes non nulles sont alors linéairement indépendantes).

A une MTI on associera le graphe dont l'ensemble des colonnes non nulles est la matrice d'incidence.

Définition 8.

Soit deux vecteurs élémentaires de même origine X et Y on notera S(X,Y)=X-Y si ($\beta(X)$-$\beta(Y)$)>0, sinon Y-X, c'est à dire celui parmi X-Y et Y-X qui est un vecteur élémentaire.

On remarquera que S(X,X)=0 et que S(X,Y)=0$\Longleftrightarrow X=Y$.

Exemple 9. $\mathrm{S}\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ mais $\mathrm{S}\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Remarque 10. Si X et Y sont deux vecteurs élémentaires de même origine ou de même extrémité la réunion des sommets de X et Y est égale à la réunion de X et de S(X,Y); par suite remplacer Y par S(X,Y) ne modifie pas V.

Définition 11. *Incidence d'une chaine*

Soit la chaine $C=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i e_i$ où les $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}\{-1,1,0\}$ on appelle incidence de C le vecteur $\mathrm{M}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ ....\\ ....\\ \varepsilon_m\end{pmatrix}$

Proposition 12.

Avec les notations ci-dessus les cycles de G sont les chaines d'incidence nulle.

Définition 13. *Cycles élémentaires*

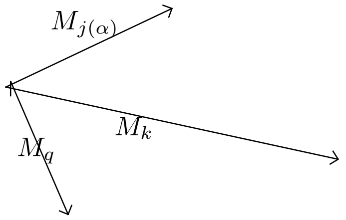
On appellera socle du cycle (v_{i_1}, ..., $v_{i_{q-1}}$, v_{i_1}) la liste [v_{i_1}, ..., $v_{i_{q-1}}$] (définie à une translation modulo q-1 près).e

Lorsque le socle est injectif le cycle sera dit élémentaire.

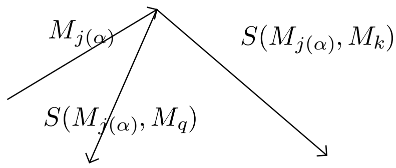
2 La réduction de la matrice d'incidence

Définition 14. *Redéploiement élémentaire d'un graphe*

Soit α un sommet et M$_{j(\alpha)}$ la colonne de M la plus grande au sens de $\preccurlyeq$ parmi les colonnes d'origine α, on appellera redéploiement élémentaire du graphe M le remplacement de toutes les autres colonnes M$_k$ de même origine que M$_{j(\alpha)}$ par les colonnes S(M$_{j(\alpha)}$,M$_k$).



devient



Proposition 15. *Algorithme : séparer les origines*

Soit la matrice d'incidence M et (e$_1$,...,e$_m$) la liste des arêtes, dans l'ordre des colonnes de M; on pose M'=M et P=I.

Soit i:1

tant que i$\leqslant n$

A:$\{M_k, \alpha(M_k) = i\}$, si $A \neq \varnothing$, soit M$_{j_0}$=max(A), pour tout N de A-M$_{j_0}$, N:N-M$_{j_0}$ (=S(N,M$_{j_0}$)),P:P-P$_{j_0}$

i:i+1.

Il est immédiat qu'à chaque itération on obtient une MTI, et après un nombre fini d'itérations on aboutit à une MTI réduite M'; à chaque itération s'effectue un redéploiement élémentaire de telle sorte qu'à la fin l'ensemble des sommets de M' est celui de M, mais les arêtes de M' ont des origines distinctes deux à deux, donnant à l'ensemble des sommets une structure d'ensemble partiellement ordonné, filtrant à droite.

De l'égalité M'=MP on déduit pour chaque colonne M'$_j$ de M' que $\sum_{i=1}^{m} P_{\mathrm{ij}} M_i$ =M'$_j$, qui est un vecteur élémentaire (nul ou pas).

Proposition 16. *L'algorithme et les cycles; la matrice P*

Si on définit pour chaque colonne M'$_j$ de la matrice finale M' l'ensemble S(j)={k,M'$_k$>M'$_j$} et E(j)=$\left\{\sum_{k\in S(j)} \eta_k M_k, \forall \eta_k \in \{0,1\}\right\}$ alors (à l'issue de l'exécution) chaque colonne de M' vérifie l'égalité M'$_j$=min{M$_j$-Q, $Q\in E(j)$}. *

Cette remarque va nous permettre d'étudier les coefficients apparaissant dans la matrice P.

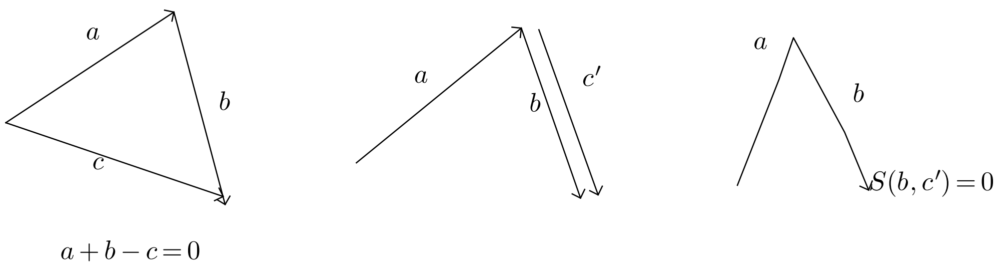
Soit un cycle élémentaire de M: $\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{j_k}e_{j_k}$=0, où $M'_{j_1}>\ldots>M'_{j_r}$, alors M_{j_r}=$-\sum_{k=1}^{r-1}\frac{\varepsilon_{j_k}}{\varepsilon_{j_r}}M_{j_k}$; on déduit de (*) que M'$_{j_r}$=0 (**) et par suite P$_{j_r}$=E_{j_r}+$\sum_{k=1}^{r-1}\frac{\varepsilon_{j_k}}{\varepsilon_{j_r}}E_{j_k}$ où E_i désigne le i-ème vecteur de la base canonique; en particulier la colonne P$_j$ est à coefficients dans {-1,1,0}.

Considérons une arête M$_j$ n'appartenant pas à un cycle: algébriquement la colonne P$_j$ telle que M'$_j$=MP$_j$ est définie « à un cycle près », cependant comme S(j)={k,M'$_k$>M'$_j$} et comme dans chaque cycle il y a une arête M$_k$ telle que M'$_k$=0 et donc ne peut appartenir à S(j), il découle de (*) qu'il ne peut y avoir de « cycle » comptabilisé, c'est à dire d'arête comptée plusieurs fois dans l'expression de M'$_j$ et donc P$_j$ ne contient que des coefficients appartenant à $\{-1,1,0\}$.

M' étant réduite et engendrée par opérations élémentaires sur les colonnes à partir de M, ses colonnes non nulles sont linéairement indépendantes et engendrent Im(M), donc le nombre de ses colonnes nulles est la dimension du noyau Ker(M); les colonnes correspondant dans P appartiennent à Ker(M) et, comme P est le produit de matrices représentant des opérations élémentaires, elle est inversible d'où finalement ces colonnes, indépendantes, constituent une base de Ker(M).

Plus haut nous avions vu que les cycles sont les chaines d'incidence nulle; la discussion ci-dessus montre que les colonnes P$_j$ telles que MP$_j$=0 décrivent les cycles élémentaires.

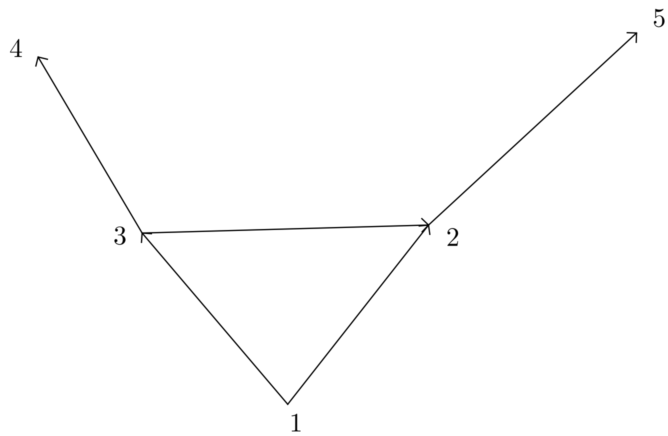
Exemple 17.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Exemple 18.



$$M'_k = (1,2) + (2,3) + (3,4)$$

$$M'_j = (1,3) - (2,3) + (2,5)$$

Comme le redéployement a résolu le cycle (1,2,3,1) avant les arêtes relatives aux sommets 4 et 5, au moment du redéployment qui les concerne M'$_k$=(1,3)+(3,4) et M'j = (1, 2) + (2, 5) et M'$_j$-M'$_k$=(1,2)+(2,5)-(1,3)-(3,4); les coefficients de la colonne concernée dans P sont dans {-1,1,0}.

La remarque 10 assure que les composantes connexes de M' sont les mêmes que celles de M.

Exemple 19.

```
Maxima 5.41.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

```
(%i1) m:transpose(matrix([1,-1,0,0,0,0],[1,0,0,-1,0,0],[1,0,-1,0,0,0],[0,
      0,1,-1,0,0],[0,0,1,0,0,-1],[0,1,0,0,0,-1],[0,1,-1,0,0,0],[0,0,0,0,1,-
      1]));p:ident(8);
```

(%o1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(%o2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i3)
```
for k:1 thru 6 do (m[k,2]:m[k,2]-m[k,1],m[k,3]:m[k,3]-m[k,1],p[k,3]:p[k,3]-
p[k,1],p[k,2]:p[k,2]-p[k,1]);m;p;
```

(%o3) **done**

(%o4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(%o5)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i6)
```
for k:1 thru 6 do (m[k,2]:m[k,2]-m[k,3],m[k,6]:m[k,6]-m[k,3],m[k,7]:m[k,7]-
m[k,3],p[k,2]:p[k,2]-p[k,3],p[k,6]:p[k,6]-p[k,3],p[k,7]:p[k,7]-p[k,3]);m;p;
```

(%o6) **done**

(%o7)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(%o8)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i73)
```
for k:1 thru 6 do (m[k,4]:m[k,4]-m[k,2],p[k,4]:p[k,4]-p[k,2],m[k,5]:m[k,
5]-m[k,2],p[k,5]:p[k,5]-p[k,2],m[k,6]:m[k,6]-m[k,2],p[k,6]:p[k,6]-p[k,
2]);m;p;
```

(%o73) **done**

(%o74)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(%o75)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i76)
```
for k:1 thru 6 do (m[k,6]:m[k,6]-m[k,5],p[k,6]:p[k,6]-p[k,5]);m;p;
```

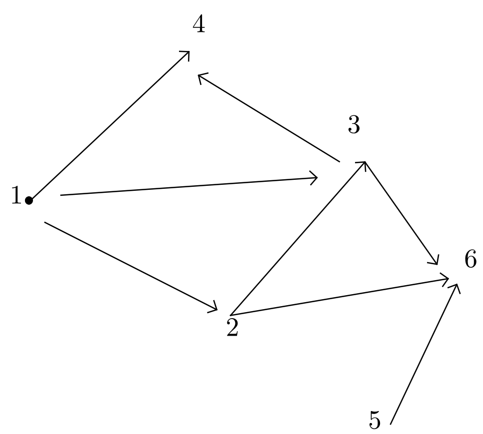
(%o76) **done**

(%o77)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

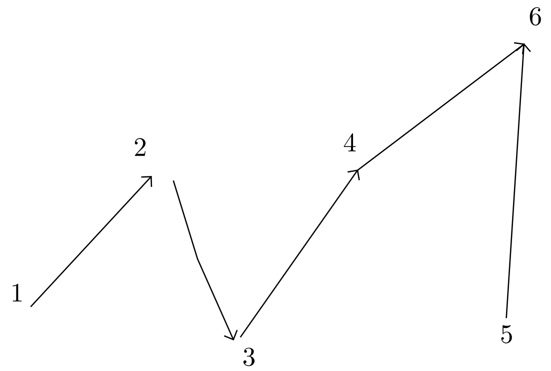
(%o78)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i79)

Le graphe G était



La matrice M', privée de sa colonne nulle, représente le graphe



Le « nouveau » graphe possède les mêmes sommets mais l'ensemble de ses arêtes a changé.

Remarque 20.

Si on associe à un graphe acyclique une relation d'ordre sur l'ensemble des sommets V qui consiste à écrire que v<w lorsque v-w est une somme d'arêtes, M' représente un ordre filtrant à droite sur chaque composante connexe [1].

Théorème 21. *Sur les composantes connexes*

Interprétons la remarque 20:

dans chaque composante connexe de M' (c'est à dire de M) il y a un sommet et un seul qui est extrémité d'une arête de M' et pas origine; donc il suffit de rechercher les lignes de M' qui contiennent un -1 et pas de 1.

3 Complexité (première approche)

Soit pour chaque sommet x de M d(x)=$|\{k, \alpha(M_k) = x\}|$.

Lors du redéployment des arcs de sommet x il y aura d(x)-1 soustractions de la forme M_i:M_i-M_{j_0} et P:P-P_{j_0}; ces soustractions créent des colonnes dans M' dont l'origine est égale à l'extrémité y de M_{j_0}, qui s'ajoutent aux d(y) colonnes qui avaient pour origine y.

D'où au total il y aura (au plus) $d(1) - 1 + (d(1) + d(2) - 1)$+....+(d(1)+d(2)+....+d(p)-1) « étapes », chaque étape comprenant une soustraction de la forme N:N-M_{j_0} et une soustraction P:P-P_{j_0}.

Les suites (d(1)+d(2)+...+d(k)) forment une suite strictement croissante à valeurs dans {1,...,n} on pourra donc dire que la somme $d(1) - 1 + (d(1) + d(2) - 1)$+....+(d(1)+d(2)+....+d(p)-1) est O(n^2).

La matrice M et ses transformations M' sont (très) creuses un seul 1 et un seul -1 par colonne et la soustraction se résume à changer un unique 1 en 0 et un unique 0 en 1; la représentation des matrices creuses doit permettre un coût très faible pour cette opération.

Quant à P, comme elle ne comporte que des -1,+1,0, mais leur nombre n'est pas uniformément borné; en revanche chaque opération P_i:P_i-P_{j_0} consiste à recopier une colonne, prendre son inverse et lui ajouter un 1 sur la diagonale; une autre manière de voir m'a été suggérée par David Teller: considérer chaque colonne (formée de +1,-1,0) comme un nombre écrit en ternaire, et exploiter le calcul en ternaire. Le côut de P:P-P_{j_0} doit aussi être assez bas; les d(1)-1 premières consistent à changer un 0 en un -1 chaque fois, le d(1)+d(2)-1 (au pire) changent deux 0, etc...

d'où, au pire, 1 $\{d(1)-1\}+2\{(d(1)+d(2)-1)\}$+....+p$\{(d(1)+d(2)+....+d(p)-1)\}$ réécritures de 0 en +/-1; c'est à dire O(n^3) opérations « très élémentaires ».

Le stockage étant très économe: deux matrices creuses.

On comparera avec [1] et [2]

Paris, janvier 2019

Bibliographie :

[1] perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2009/nicolas-brunie.pdf

[2] K.Paton, An Algorithm for Finding a Fundamental Set of Cycles of a Graph, Communications of the ACL, volume 12, Number9, September 1969.