97e année (1986-1987) Avril 1987 - Mensuel n° 8

Revue de Mathématiques Spéciales

Aspects algébriques de la théorie des systèmes linéaires (à coefficients constants)

par Patrick TELLER

Le problème du concours ENSAE, 1re épreuve, a porté cette année sur une notion de la Théorie des systèmes linéaires : la contrôlabilité, qui relève de la partie de cette théorie appelée « contrôle », « contrôle optimal »...

Les applications de ces disciplines sont vastes et vont de l'Automatique où elles sont évidemment fondamentales jusqu'à la Théorie des systèmes économiques...

Le but de ces lignes est de donner une brève introduction à cette notion qui a l'avantage d'utiliser les connaissances en Algèbre linéaire du programme des Mathématiques spéciales (M, M').

Définition. – *Soit* $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, *un vecteur* $Y \in \mathbb{R}^n$ *est dit* (A, B) *contrôlable s'il existe* $(g, x_0) \in C(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^n$ *tels que la solution du système*

$$X' = AX + gB$$

qui est définie par la condition initiale $X(0) = Y$ *a la propriété*

$$X(x_0) = 0.$$

Il est facile de montrer que la solution de ce système qui vérifie $X(0) = Y$ est donné par

$$u \mapsto X(u) = e^{Au}Y + \left(\int_0^u g(\sigma)e^{A(u-\sigma)}\,d\sigma\right)B.$$

I. – Étude de l'ensemble des vecteurs Y(A, B) contrôlables.

Théorème I.1. – *Soit* $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$; *l'ensemble* Γ *des vecteurs* $Y \in \mathbb{R}^n$ *qui sont* (A, B) *contrôlables est un espace vectoriel réel.*

Pour cela, nous avons démontrer le lemme suivant.

Lemme 1. – *Si* Y *est* (A, B) *contrôlable, alors il existe* $(g, x_1) \in C(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^+$, *tels que la solution* X *du système*

$$X' = AX + gB$$

qui vérifie $X(0) = Y$, *soit nulle sur* $[x_1, +\infty[$.

Démonstration : Soit $g_0 \in C(\mathbb{R}^+)$ telle que $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+$ avec $X(x_0) = 0$ pour la solution X du système $X' = AX + gB$ qui vérifie $X(0) = Y$.

Le cas le plus simple est celui où $g_0(x_0) = 0$ alors en posant

$$g|_{[0,x_0]} = g_0 \qquad \text{et} \qquad g|_{[0,+\infty[} = 0$$

on obtient

$$\forall u \geqslant x_0,$$

$$X(u) = e^{Au}Y + \left(\int_0^u g(\sigma)e^{(u-\sigma)A}\,d\sigma\right)B$$

$$= e^{A(u-x_0)}\left\{e^{Ax_0}Y + \left(\int_0^u g(\sigma)e^{(x_0-\sigma)A}\,d\sigma\right)B\right\}$$

$$= e^{A(u-x_0)}\left\{g_0(x_0) + \left(\int_{x_0}^u g(\sigma)e^{(x_0-\sigma)A}\,d\sigma\right)B\right\}$$

$$= e^{A(u-x_0)}\{g_0(x_0) + 0\} = e^{A(u-x_0)}\{0 + 0\} = 0.$$

Si $g_0(x_0) \neq 0$ il va falloir construire la fonction g de manière plus « sophistiquée ».

Dans un premier temps, posons, après avoir choisi $x_1 \geqslant x_0$ de manière arbitraire :

$$\begin{cases} g_{00}|_{[0,x_0]} = g_0; \quad g_{00}(x_1) = 0 \\ g_{00} \text{ affine sur } [x_0, x_1] \\ g_{00}|_{[x_1,+\infty[} = 0. \end{cases}$$

La solution de

$$\begin{cases} X' = AX + g_{00}B \\ X(0) = Y \end{cases}$$

satisfait ainsi $X(x_0) = 0$, cherchons à corriger g_{00} en g_1 de telle sorte que la solution de

$$\begin{cases} X' = AX + g_1B \\ X(0) = Y \end{cases}$$

soit nulle sur $[x_1, +\infty[$. Pour cela posons

$$\begin{cases} g_1|_{[0,x_0]} = g_{00} \\ g_1|_{[x_0,x_1]} = g_{00} + h \\ g_1|_{[x_1,+\infty[} = g_{00}\ ; \end{cases}$$

Les conditions que devra remplir h sur $[x_0, x_1]$ seront :

a) $h(x_0) = h(x_1) = 0$ afin que g_1 soit continue.

b) $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} g_0(\sigma)e^{-\sigma A}\, d\sigma = -\int_{x_0}^{x_1} h(\sigma)e^{-\sigma A}\, d\sigma.$

En posant $e^{-\sigma A} = (a_{ij}(\sigma))_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ et

$$\int_{x_0}^{x_1} - g_0(\sigma)a_{ij}(\sigma)\, d\sigma = \alpha_{ij},$$

on obtient donc pour les h les conditions

1. $h \in E = \{f \in C[x_0, x_1] / f(x_0) = f(x_1) = 0\}$.
2. $\forall (i,j) \in a_1, \{1, \dots, n\}^2$,

$$\int_{x_0}^{x_1} h(\sigma)a_{ij}(\sigma)\, d\sigma = \alpha_{ij}.$$

En munissant l'espace vectoriel E (de dimension infinie) du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_{x_0}^{x_1} f(\sigma)g(\sigma)\, d\sigma,$$

on obtient donc dans l'espace préhilbertien réel E les conditions :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \qquad \langle h, a_{ij}\rangle = \alpha_{ij}.$$

Ces conditions sont compatibles à cause de la dimension de E donc h existe.

La démonstration du théorème **I. 1** en découle aisément car si $(Y_1, Y_2) \in \Gamma^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe (x_i, g_i) tels que la solution de

$$X' = AX + g_i B$$

avec $X(0) = Y_i$ $(i = 1,2)$ est nulle pour $x \geqslant x_i$ alors la solution de

$$\begin{cases} X' = AX + (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)B \\ X(0) = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \end{cases}$$

est nulle sur $[\max(x_1, x_2), +\infty[$.

Introduisons quelques notations utiles :

$$C(\sigma) = e^{-\sigma A}B\,;$$

$$W(x) = \int_0^x C(\sigma)\,{}^tC(\sigma)\, d\sigma\,;$$

$$\mathscr{W} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^+} \mathrm{Im}\,(W(x)),$$

$$\mathscr{K} = \bigcap_{x\in\mathbb{R}^+} \mathrm{Ker}\,(W(x)).$$

Théorème I. 2. — **i)** $\mathscr{W}$ et $\mathscr{K}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

ii) $\mathscr{W} \oplus \mathscr{K} = \mathbb{R}^n$.

Démonstration : **i)** $\mathscr{K}$ est une intersection de sous-espace vectoriels ; pour ce qui en est de $\mathscr{W}$, il suffit de montrer que l'application de $\mathbb{R}^+$ dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto \mathrm{Im}\,(W(x))$ est croissante (pour la relation d'inclusion).

Pour cela il est plus simple de considérer $\mathrm{Ker}\,(W(x))$ en remarquant que

$$\int_0^x C(\sigma)\,{}^tC(\sigma)\, d\sigma$$

étant symétrique. on a

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(W(x)) \oplus \mathrm{Ker}\,(W(x)).$$

Soit $Y \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} Y \in \mathrm{Ker}\,(W(x)) &\Leftrightarrow W(x)Y = 0 \Leftrightarrow {}^tYW(x)Y = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^tY \int_0^x C(\sigma)\,{}^tC(\sigma)\, d\sigma\, Y = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_0^x {}^t[{}^tC(\sigma)Y][{}^tC(\sigma)Y]\, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Or, l'application $\sigma \mapsto {}^t[{}^tC(\sigma)Y][{}^tC(\sigma)Y]$ étant continue et positive, on peut en déduire que

$$Y \in \mathrm{Ker}(W(x)) \Leftrightarrow \forall\sigma \in [0, x], \quad {}^t[{}^tC(\sigma)Y][{}^tC(\sigma)Y] = 0\,;$$

Enfin, comme ceci est le carré scalaire de ${}^tC(\sigma)Y$, on en déduit que

$$Y \in \mathrm{Ker}(W(x)) \Leftrightarrow \forall\sigma \in [0, x],\ {}^tC(\sigma)Y = 0.$$

D'où la décroissance de l'application

$$x \mapsto \mathrm{Ker}(W(x)).$$

Par suite

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}^+} \mathrm{Im}(W(x)) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Im}(W(x)),$$

ce qui permet de déduire que $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^+} \mathrm{Im}(W(x))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On peut en fait dire plus ; comme l'application $x \mapsto \dim \mathrm{Im}(W(x))$ est croissante, à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$, elle est stationnaire à partir d'un certain moment, d'où

$$\exists\, x' \in \mathbb{R}^+ t.q. \bigcup_{x\in\mathbb{R}^+} \mathrm{Im}(W(x)) = \mathrm{Im}(W(x')).$$

ii) Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{Im}(W(x)) \oplus \mathrm{Ker}(W(x)) = \mathbb{R}^n$$

on déduit de la dernière remarque que

$$\mathscr{W} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^+} \mathrm{Im}(W(x)) = \mathrm{Im}(W(x'))$$

et

$$\mathscr{K} = \mathrm{Ker}(W(x')).$$

Par suite

$$\mathscr{W} \oplus \mathscr{K} = \mathbb{R}^n.$$

Précisons que, d'après les propriétés des sous-espaces propres des endomorphismes symétriques, la somme directe ci-dessous est *orthogonale*, ce qui nous servira par la suite.

Théorème I.3. – $\Gamma = \mathscr{W}$.

Démonstration : **i)** Soit $Y \in \mathscr{W}$, alors il existe $(x, Z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ tels que

$$Y = \left(\int_0^x C(\sigma)^t C(\sigma) d\sigma\right) Z.$$

En posant $g(\sigma) = -{}^t B e^{-\sigma \cdot {}^t A} Z$ on peut vérifier que Y est ainsi (A, B) contrôlable, d'où

$$\mathscr{W} \subset \Gamma.$$

ii) Soit $Y \in \mathscr{K}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad {}^t Y C(x)^t C(x) Y = 0,$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ {}^t C(x) Y = 0 \text{ c'est-à-dire } {}^t B e^{-\sigma \cdot {}^t A} Z = 0.$$

Si, de plus, Y est contrôlable il existe $(x_0, g_0) \in \mathbb{R}^+ \times C(\mathbb{R}^+)$ tels que

$$0 = e^{Ax_0} Y + \left(\int_0^{x_0} g_0(\sigma) e^{A(x_0 - \sigma)} d\sigma\right) B,$$

donc

$$Y = \left(\int_0^{x_0} g_0(\sigma) e^{-\sigma A} d\sigma\right) B$$

et alors

$$\begin{aligned} {}^t Y . Y &= {}^t Y \left(\int_0^{x_0} g_0(\sigma) e^{-\sigma A} d\sigma\right) B \\ &= \int_0^{x_0} g_0(\sigma) {}^t Y e^{-\sigma A} B d\sigma \\ &= \int_0^{x_0} g_0(\sigma) {}^t \{{}^t B e^{-\sigma {}^t A} Y\} \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{K} \cap \Gamma = \{0\}$. Comme Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\mathscr{W}$ et dont l'intersection avec $\mathscr{K}$ est réduite au vecteur nul, on en conclut que $\Gamma = \mathscr{W}$.

Ceci identifie formellement l'espace vectoriel des vecteurs (A, B) contrôlables ; cependant ce résultat est peu maniable.

Définition. – *On appelle* matrice de contrôlabilité *du couple* (A, B), *la matrice* C (A, B) *dont les colonnes sont celles de* $(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$; on a

$$C(A, B) \in M_n(\mathbb{R}).$$

On désignera par $\tilde{C}(A, B)$ l'espace vectoriel engendré par les colonnes de C(A, B).

Théorème I.4. – $\Gamma = \tilde{C}(A, B)$.

Démonstration : Il suffit de montrer que

$$\mathscr{K}^{\perp} = \tilde{C}(A, B).$$

On a montré dans la dernière démonstration que

$$Y \in \mathscr{K} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad {}^t B e^{-x {}^t A} Y = 0 ;$$

en dérivant cette égalité (par rapport à x) et en posant $x = 0$ on en déduit

$${}^t B {}^t A^k Y = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'autre part d'après le théorème de Hamilton-Cayley

$$\tilde{C}(A, B) = \text{Vect}\{A^k B\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

On en déduit

$$Y \in \mathscr{K} \Leftrightarrow Y \in \tilde{C}(A, B)^{\perp}.$$

Définition. – *Une matrice* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *est dite* cyclique *si, et seulement si, on a l'une des conditions équivalentes :*

i) *Le polynôme minimal de* M *est de degré n ;*

ii) *Il existe un vecteur colonne* $V \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $(V, MV, M^2V, \ldots, M^{n-1}V)$ *soit une base de* $\mathbb{R}^n$. (*V est alors appelé vecteur cyclique relativement à* M).

L'équivalence des deux conditions ne pose de problème que dans le sens i) ⇒ ii) (voir l'article de P. Delezoide, RMS, n° 4, 1985-1986).

Théorème I.5. – *Tout vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *est* (A, B) *contrôlable si, et seulement si,*

i) A *est cyclique ;*
et
ii) B *est cyclique relativement à* A.

Découle du théorème I.4.

Définition. – *Un couple* $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ *est dit contrôlable si, et seulement si, tout vecteur* $Y \in \mathbb{R}^n$ *est* (A, B) *contrôlable.*

Le théorème I.5 montre que

$$(A, B) \text{ contrôlable} \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ cyclique} \\ B \text{ cyclique relativement à } A. \end{cases}$$

II. – Systèmes contrôlables et systèmes a une entrée.

Définition. – *Dans le langage de la théorie des systèmes linéaires (à coefficients constants) on appelle système à une entrée tout système de la forme :*

$$(**) \quad z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = u(t)$$

où z et u sont des fonctions numériques.

Proposition II.1. – *Quelle que soit la donnée de conditions initiales*

$$(z(0), z'(0), \ldots, z^{(n-1)}(0))$$

il existe une fonction numérique et un réel x_1 *tel que la solution* z *du système* (**) *définie par les conditions initiales vérifie*

$$z|_{[x_1, +\infty[} = 0.$$

Démonstration : On sait que (**) se traduit sous la forme

$$X' = AX + u(t)B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} z \\ z' \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat de montrer que A est cyclique et B cyclique relativement à A. Cette proposition montre que

$$\forall (z(0), z'(0), \ldots, z^{(n-1)}(0)) \in \mathbb{R}^n,$$
$$\exists (x_1, u) \in \mathbb{R}^+ \times C(\mathbb{R}^+).$$

La solution de (**) définie par ces conditions initiales s'annule à partir de x_1.

Théorème II.2. — *Si les matrices* $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ *sont telles que tout vecteur* $Y \in \mathbb{R}^n$ *est* (A, B) *contrôlable, alors il existe une matrice* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle*

$$\forall g \in C(\mathbb{R}^+),\ X' = (P^{-1}AP)X + gP^{-1}B$$

soit de la forme (**).

De plus P *est unique et défini par*

$$P = C(A, B).[C(C, d)]^{-1}$$

où

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont les coefficients du polynôme minimal de* A.

Remarque : Si $X' = AX + gB$ et si on pose $X_1 = P^{-1}X$ alors

$$X_1' = (P^{-1}AP)X_1 + gP^{-1}B$$

donc le théorème signifie que le système

$$X' = AX + gB$$

correspond, par le changement de base défini par P, à un système à une entrée.

Démonstration : Si $C = P^{-1}AP$ et $d = P^{-1}B$ alors

$$\begin{aligned} C(C,d) &= (d, Cd, \ldots, C^{n-1}d) \\ &= (P^{-1}B, P^{-1}AB, \ldots, P^{-1}A^{n-1}B) \\ &= P^{-1}(B, AB), \ldots, A^{n-1}B) = P^{-1}C(A, B). \end{aligned}$$

$C(C, d)$ étant inversible puisque (C, d) est contrôlable on en déduit que

$$P = C(A, B)\,[C(C, d)]^{-1}$$

est la seule valeur possible de P.

Reste à établir que

$$P^{-1}AP = C \quad \text{et} \quad P^{-1}B = d.$$

En comparant les premières colonnes des deux matrices $C(C, d)$ et $C(A, B)$ on obtient bien $P^{-1}B = d$ et aussi les égalités

$$\begin{aligned} Cd &= P^{-1}AB = P^{-1}AP.d \\ C^2d &= P\ldots = (P^{-1}AP)^2d \\ &\vdots \\ C^{n-1}d &= \ldots = (P^{-1}AP)^{n-1}d \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (C - P^{-1}AP)(d) &= (C - P^{-1}AP)(Cd) = \ldots \\ &= (C - P^{-1}AP)C^{n-2}d = 0. \end{aligned}$$

Comme $(d, Cd, C^2d, \ldots, C^{n-1}d)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$ (car d est C-cyclique), il suffit de montrer que

$$C.C^{n-1}d = P^{-1}AP.C^{n-1}d.$$

Comparons les polynômes minimaux de C et de A, ils sont égaux (la dernière ligne de C a été choisie pour cela !) :

$$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n,$$

d'où

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^n = &- a_1(P^{-1}AP)^{n-1} \\ &- a_2(P^{-1}AP)^{n-2} \ldots - a_{n-1}P^{-1}AP - a_n\mathrm{Id} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^nd = &- a_1(P^{-1}AP)^{n-1}d \\ &- a_2(P^{-1}AP)^{n-2}d \ldots - a_{n-1}P^{-1}APd - a_nd \\ = &- a_1C^{n-1}d - a_2C^{n-2}d \ldots - a_nd = C^nd. \end{aligned}$$

Finalement, $(P^{-1}AP)C^{n-1}d = C.C^{n-1}d$ et donc $P^{-1}AP$ et C coïncident sur la base d, Cd, $C^2d, \ldots, C^{n-1}d$ et, par suite, sont égaux :

$$P^{-1}AP = C.$$

Définition. — *Deux couples* (A_1, B_1) *et* $(A_2, B_2) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ *sont dits semblables s'il existe* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\begin{cases} P^{-1}A_1P = A_2 \\ P^{-1}B_1 = B_2. \end{cases}$$

Ceci est clairement une relation d'équivalence.

Le théorème II.2 signifie donc que tout couple contrôlable est semblable à un couple (C, d) unique, correspondant à un système à une entrée.

III. — Couples contrôlables et feed-back.

La partie encore obscure du résultat du **I** concerne la fonction g à employer pour obtenir le résultat recherché. Les résultats suivants seront quant à eux plus effectifs.

On peut considérer une classe élémentaire de fonctions en imposant à g d'être une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

$$X' = AX + g(X)B \quad \text{avec} \quad g(X) = \langle F, X \rangle$$

où F sera un vecteur colonne fixe appelé vecteur de l'action en retour (feed-back vector). Alors le système devient $X' = (A + B{}^tF)X$.

Proposition III.1. — Soit le couple (A, B) contrôlable ; quel que soit le polynôme de degré inférieur ou égal à n, il existe un vecteur $F \in \mathbb{R}^n$ tel que le polynôme minimal de $A + B{}^tF$ soit égal à π.

Démonstration : Le polynôme minimal étant invariant par similitude, il suffit de démontrer le résultat pour le couple (C, d) :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 \cdots\cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots\cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $F' = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, on obtient

$$C + d{}^tF' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -\beta_n & -\beta_{n-1} & \cdots\cdots & -\beta_1 \end{pmatrix}$$

où

$$\beta_i = a_i - k_{n-i+2}, \qquad v_i \in \langle 1, \ldots, n \rangle.$$

Donc F′ est défini et par voie de conséquence F.

Remarquons que F′ est unique et par suite, F aussi (à cause de l'unicité dans le théorème **II.2**).

Un calcul sans grandes difficultés montrerait que

$${}^tF = {}^td[C(A, B)]^{-1}\pi(A).$$

Achevons ce paragraphe en faisant les remarques suivantes :

1° Le choix de π équivaut au choix des valeurs propres de la matrice M telle que $X' = MX$.

2° Les valeurs propres de M définissent le comportement asymptotique de la fonction $t \mapsto X(t)$ ce qui introduit des propriétés comme la stabilité ; en effet il suffit d'utiliser les résultats suivants :

Proposition III.2.

1. *Soit la matrice* $M \in M_n(\mathbb{R})$; $\lim_{t \to +\infty} M^t = 0 \Leftrightarrow$ *les valeurs propres (complexes) de* M *sont de module strictement inférieur à* 1.

2. *Soit* $M \in M_n(\mathbb{R})$; *les valeurs propres de* e^{Mt} *sont les complexes* $e^{\lambda t}$ *où* $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$ ($\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$ *désignant les valeurs propres complexes de* M).

Comme $\lambda = a + ib \Rightarrow |e^{\lambda}| = e^a$, on en déduit facilement le théorème suivant :

Théorème III.3. — *Si le couple* (A, B) *est contrôlable, il existe un vecteur* $F \in \mathbb{R}^n$ *tel que les solutions du système*

$$X' = AX + B{}^tFX$$

tendent vers 0 *lorsque* t *tend vers* $+\infty$.

Bibliographie

On peut se référer à la bibliographie suivante allant du style « ingénieur » avec peu de détails théoriques aux textes très mathématiques (il faut savoir que certains domaines de la Théorie des systèmes linéaires utilisent des méthodes avancées de Géométrie algébrique, d'Algèbre de Lie, de Théories des représentations...).

Les démonstrations données ci-dessus sont en général originales (le lemme I.1 ne semble nulle part explicité).

[1] Kolman, Arbib, Falb : *Topics in Mathematical System Theory*, Mac Graw Hill, N.Y., 1969.

Écrit avec une volonté de donner un cadre mathématique rigoureux à des « Sciences pour l'ingénieur » trop souvent ad-hoc. Donne une motivation. Parfois lourd à cause de sa volonté de formaliser la discipline.

[2] Wollowich : *Linear Multivariable Systems*, Springer Verlag, N.Y., 1974.

Livre type de l'enseignement pour ingénieurs.

[3] Barnet : *Polynomials and linear control systems*, Pure and applied Mathematics, Marcel Dekker inc. New York and basel.

Orienté vers les polynômes matriciels et la recherche d'algorithmes effectifs. Donne une « nouvelle vie » aux résultants... Les démonstrations sont parfois inutilement calculatoires. Les exercices donnent des aspects plus concrets.

[4] Hazewinkel : *Lectures on invariants, representations and Lie Algebras in systems and Control theory* (in « Séminaire d'Algèbre Dubreil-Malliavin », 1982 Lecture notes in Mathematics) Springer Verlag, N.Y., 1983.